音階にひそむ数理（前編）

2015 年 8 月 28 日

ピアノや吹奏楽などを通じて音楽をならったことのある方の中には、音階を移調するときの規則を知っている人も多いと思います。その規則というのは：

> ♯の付く順序はファドソレラミシ、このときの主音はドソレラミシ♯ファ♯ド...
> ♭の順序はシミラレソド、このときの主音はドファ♭シ♭ミ♭ラ♭レ♭ソ...

私にはいつもこれが不思議でした。というのも、この中に現れる音列は全て

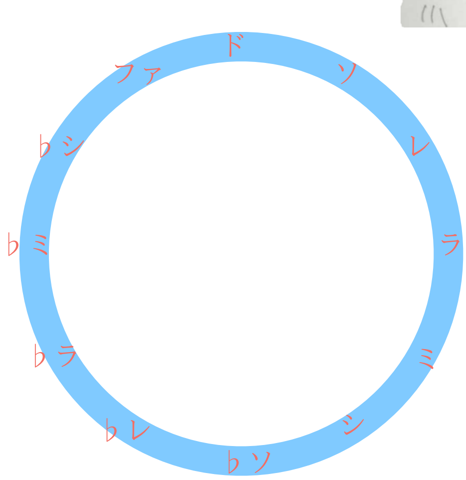
. . . ファドソレラミシ♭ソ♭レ♭ラ♭ミ♭シファドソレラミシ. . .

という 5 度圏の環の一部になっているのです。一体どうしてこんなに規則的なのだろうか。周りにも、気になっている人がかなり居るようなので、夏の自由研究としてその理由を考えてみることにします。

*

以下、この記事では音楽の基本的な部分の解説もまじえて進めますので、上の記述を読んで、一体何を言っているのかさっぱり、という人も大丈夫だと思います。でも、できればピアノやギターなどを実際に触りながら読み進めてもらえると判りやすいかもしれません。

註 1 本稿のドレミ... は全て絶対音のドレミ... を指します。
註 2 ♯, ♭などの臨時記号はドレミ... の左に書いて表すことにします。



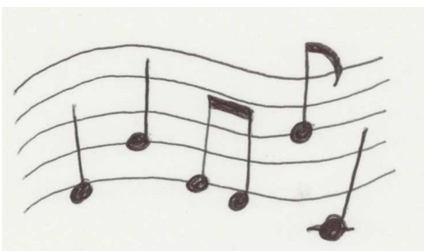


図 1: 5 度圏の環

1（移調）

たとえば「きらきら星」を弾くのに、

- 『ドドソソララソソ, ファファミミレレド』（ハ長調）
- 『ソソ $\overline{\text{レ}}\overline{\text{レ}}\overline{\text{ミ}}\overline{\text{ミ}}\overline{\text{レ}}\overline{\text{レ}}$, $\overline{\text{ド}}\overline{\text{ド}}$ シシララソ』（ト長調）
- 『ファファ$\overline{\text{ド}}\overline{\text{ド}}\overline{\text{レ}}\overline{\text{レ}}\overline{\text{ド}}\overline{\text{ド}}$, ♭シ♭シララソソファ』（ヘ長調）

  ⋮

というように、同じ旋律を様々な高さで演奏することができます。このように各音の間の相対的な関係を変えずに、旋律全体をそっくり別の高さに移すことを**移調**といいます。

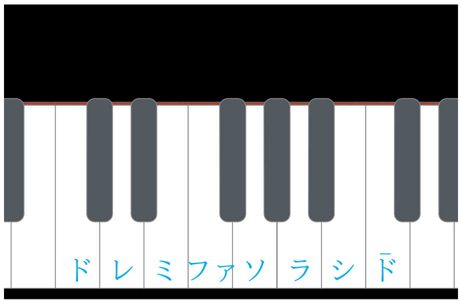


図 2: ピアノの鍵盤

移調のしくみについて理解するには、鍵盤に数字を振ると便利です。よく使う『普通のド』を 0 とし、右に行くほど数が大きくなるように振っていきます。

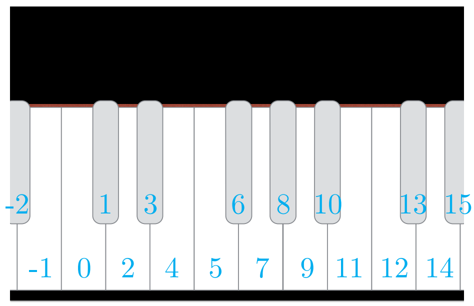


図 3: 鍵盤に数字をふる (1)

すると、冒頭の 3 つのきらきら星は次のように表されます。

- 0 0 7 7 9 9 7 7, 5 5 4 4 2 2 0 （ハ長調）
- 7 7 14 14 16 16 14 14, 12 12 11 11 9 9 7 （ト長調）
- 5 5 12 12 14 14 12 12, 10 10 9 9 7 7 5 （ヘ長調）

何だか暗号のようになってしまいましたが、気にせず観察を続けましょう。よく見ると、ハ長調の数字に 7 を足したものがト長調、5 を足したものがヘ長調の旋律であることがわかります。

以上の観察から、移調を行うためには、単に一定の数字の分だけ、鍵を右または左にずらせばよいのではないか、という予想が立ちます。

このことをもっとはっきりと見るために、音階『ドレミファソラシド』を移調してみましょう。ハ長調の音階で使う音符は次のとおり

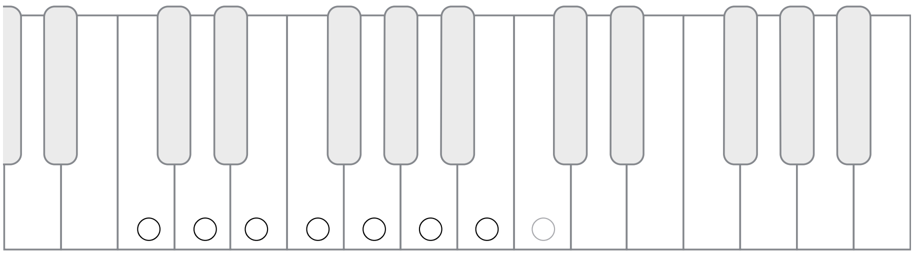


図 4: ハ長調 (+0)

この中に含まれる音を 1 つずつ右にずらしていくことで、変ニ長調の音階が得られます。手もとに楽器がある方は、これらの音が実際に音階をなしていることを確認してみるとよいでしょう。

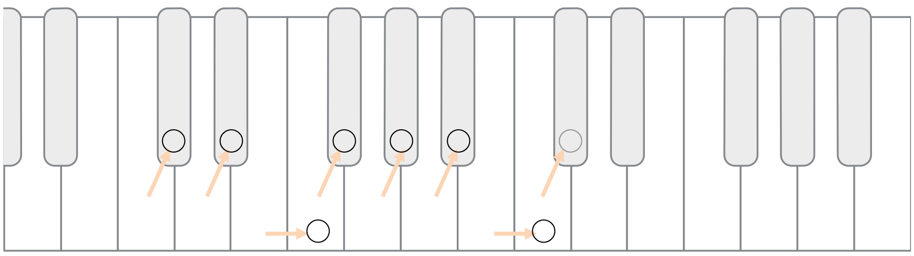


図 5: 変ニ長調 (+1)

さらに順々に右へとずらしていくことで、12 個全ての長調を得ることができます。あとで参照するために、これら一式を書き出しておきましょう。

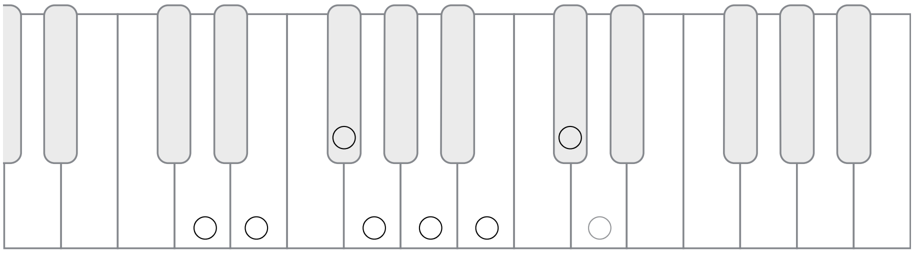


図 6: ニ長調 (+2)

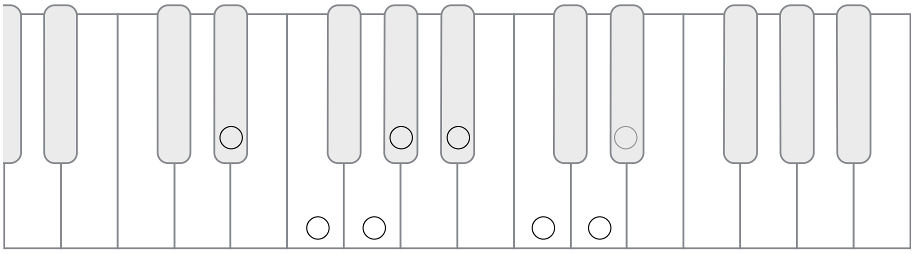


図 7: 変ホ長調 (+3)

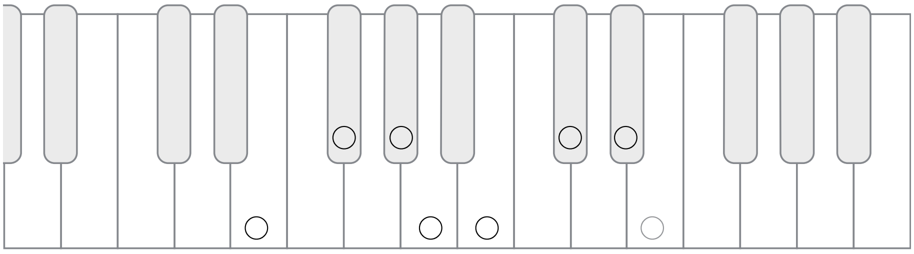


図 8: ホ長調 (+4)

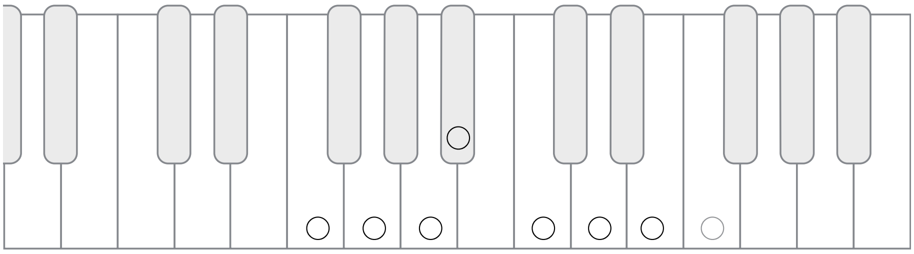


図 9: ヘ長調 (+5)

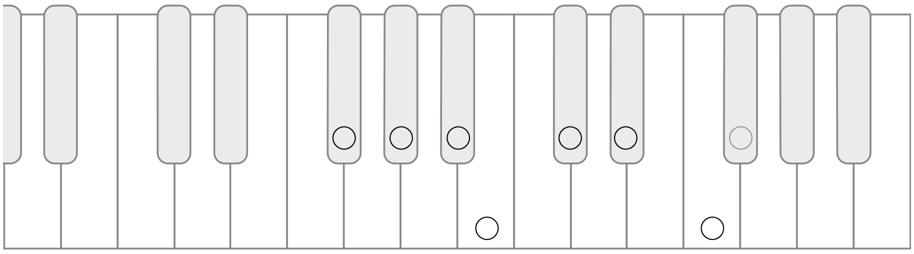


図 10: 変ト長調 (+6)

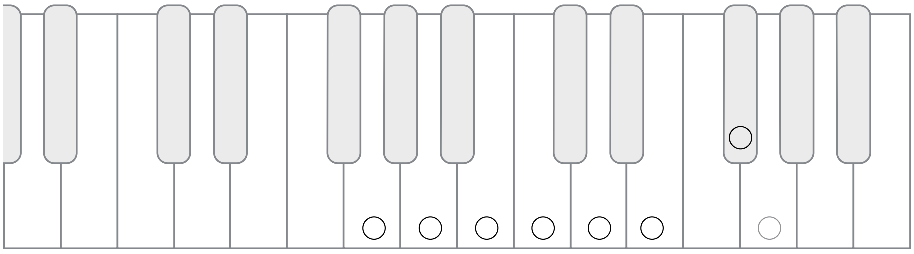


図 11: ト長調 (+7)

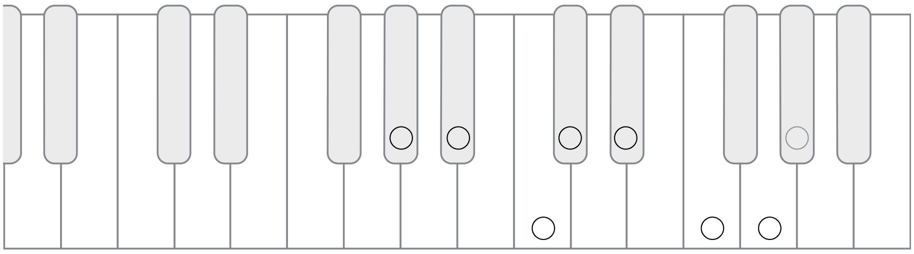


図 12: 変イ長調 (+8)

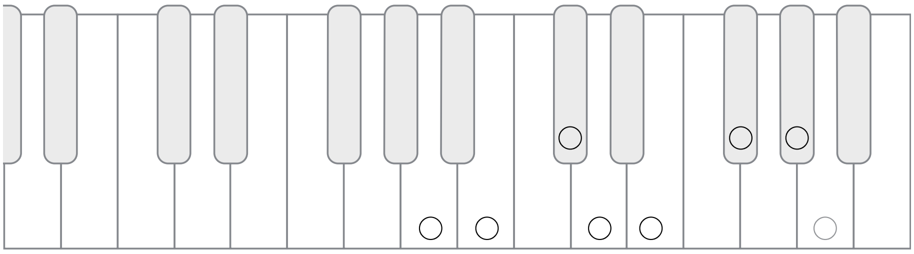


図 13: イ長調 (+9)

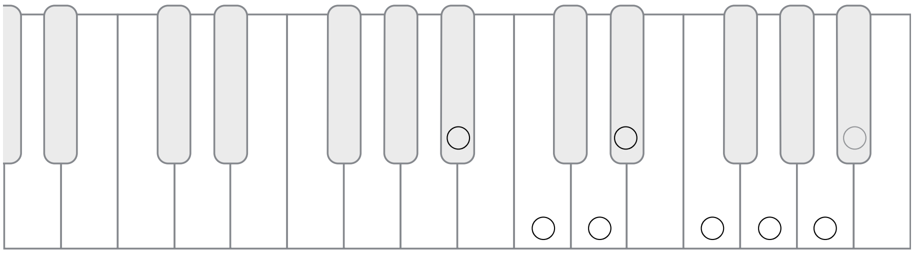


図 14: 変ロ長調 (+10)

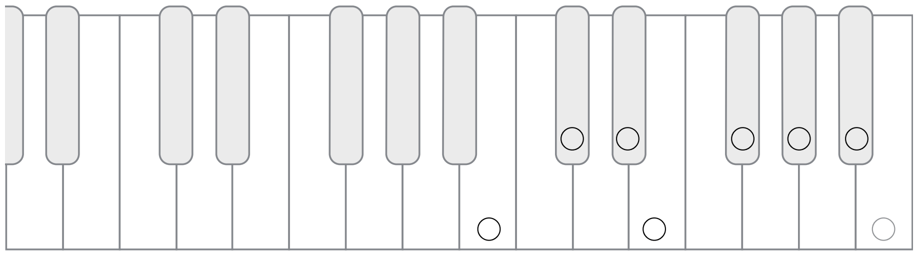


図 15: ロ長調 (+11)

各長調の音階で、使う鍵盤を青、使わない鍵盤を赤で表すと、以下のようになります。

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,	ハ長調
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,	変ニ長調
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,	ニ長調
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,	変ホ長調
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,	ホ長調
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,	ヘ長調
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,	嬰ヘ長調
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,	ト長調
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,	変イ長調
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,	イ長調
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,	変ロ長調
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,	ロ長調

ただし、ここでは普通のドと高いドなどが同じ数字になるように、図 3 の数を 12 で割った余りを考え、次のように数字を割り当てています。

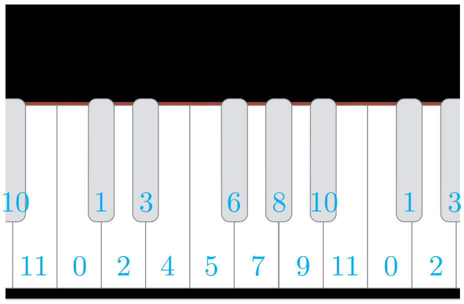


図 16: 鍵盤に数字をふる (2)

＊　＊　＊

以上まとめると、移調とは鍵盤上での平行移動に他なりません。つまり、ある旋律を移調したければ、そこに含まれる全ての音を、一定の数だけ上げたり下げたりすればよいわけです。

〜音階の和名〜

ド	$\Longleftrightarrow$	ハ
レ	$\Longleftrightarrow$	ニ
ミ	$\Longleftrightarrow$	ホ
ファ	$\Longleftrightarrow$	ヘ
ソ	$\Longleftrightarrow$	ト
ラ	$\Longleftrightarrow$	イ
シ	$\Longleftrightarrow$	ロ
$\flat$	$\Longleftrightarrow$	変
$\sharp$	$\Longleftrightarrow$	嬰

2（平均律）

前章で述べたような移調が自由に行えるのは、『平均律』という全ての音の間に対称がとれているような調律法が使われているためです。このことを少し見てみましょう。

平均律を使ってピアノを調律する際には、隣りあう音の振動数の比がおよそ $1:\sqrt[12]{2}\sim 1.05946\ldots$ になるように合わせていきます。[1] この場合の『隣り』は黒鍵も数えたもので、たとえばドの 1 つ右どなりは♯ドと考えます。用語に詳しい人には、半音と言った方がよくわかるかもしれません。あるいは先程の図 3 のように数を振って考えると、1 つ右隣へ移動するには数を 1 つ増やせばよく、ここで述べたことは、数式を使って

$$\frac{(n+1)\text{ の音の振動数}}{n\text{ の音の振動数}}=\sqrt[12]{2}$$

と表すことができます。$\sqrt[12]{2}$ という数を用いるのは、音程が 1 オクターブ上がったときに、振動数がちょうど 2 倍になるようにするためです。

わたしたちが知覚する「旋律」というものを特徴づけているのは、**各音の振動数の比**であることがわかっています。[2] たとえば、振動数の比が $1\ 1\ 2^{\frac{7}{12}}\ 2^{\frac{7}{12}}\ 2^{\frac{3}{4}}\ 2^{\frac{3}{4}}\ 2^{\frac{7}{12}}\ 2^{\frac{7}{12}}\ldots$ となるように音を並べていけば、どの音から始めても『きらきら星』の旋律に聞こえます。先に述べた通り、平均律では隣同士の音の振動数比は一定ですから、旋律を構成する各音の振動数比も、移調によって変化しません。そのため、前章で述べたように旋律を崩さずに移調を行うことができるのです。

音律の理論は、数学だけでなく、西洋音楽そのものの発展にも深く関わっています。古い時代に使われた音律のままでは、移調によって音の相互関係が損なわれ、美しく響かない音程が生まれてしまいます。モーツァルトやベートーヴェンといった作曲家たちが、1 つの曲の中で何度も転調するような精巧で素晴らしい作品を生み出すことができた背景には、音律の理論の発展があるのだとも言えるでしょう。

図 17: 『初心者のための小さなピアノソナタ』展開部（モーツァルト, K.545）

[1] 振動数という言葉の意味については、補遺 A を参照のこと。
[2] 振動数の対数が経験的な『音の高さ』であるとみなすなら、これも感覚の対数則の 1 つと考えてよいかもしれません。

3（近い調・遠い調）

ハ長調に近いのはト長調とヘ長調です。近いと言う言葉の正確な意味は説明しませんが、ここでは、ざっくり『転調しやすさ』だと考えておきます。たとえば図 18 の譜例は、ハ長調で始まりますが、第 14 小節からはト長調に移っています。

図 18: 『初心者のための小さなピアノソナタ』冒頭（モーツァルト, K.545）

ハ長調とト長調が近いことは、音階の中の共通する鍵盤の数を見れば納得できます。音階を構成する 7 つの音のうち、ド・レ・ミ・ソ・ラ・シの 6 つが共通します（図 4 と図 11）。同様に、ハ長調とヘ長調の間でも、ド・レ・ミ・ファ・ソ・ラの 6 つが共通しています（図 4 と図 9）。

ハ長調	ドレミファソラシ
ト長調	ソラシドレミ♯ファ
ヘ長調	ファソラ♭シドレミ

他にも、ト長調とニ長調はレ・ミ・♯ファ・ソ・ラ・シの 6 つが共通、ヘ長調と変ロ長調はド・レ・ファ・ソ・ラ・♭シの 6 つが共通になっています。こういった構成音のうちの 6 つが共通する長調どうしを近親調ということにしましょう。[3] 近親調の関係にある長調を隣あわせにならべていくと、円環をなすことがわかります。（この図から各長調の始めの音（主音）を抽出したものが、冒頭図 1 です。）

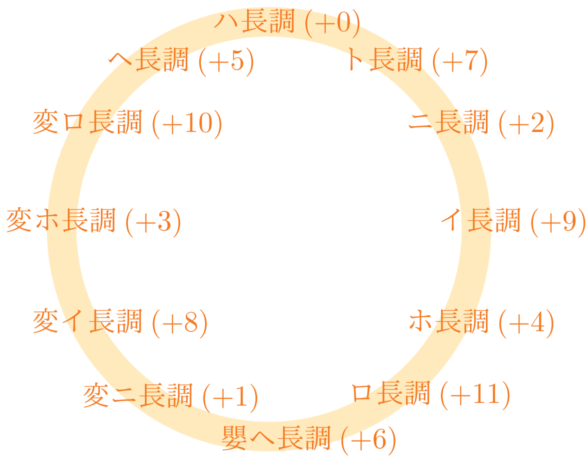


図 19: 近親調のなす円環

さて、この環にはきれいな規則が表れています。隣同士が『+7（mod 12）』ずつ離れているのです。[4] この音程差は**完全 5 度**と呼ばれ、図 19 の円環は **5 度圏の円環**とも呼ばれます。

各調の音階に含まれる黒鍵の数に注目すると、さらに不思議な規則が見えてきます。

1. 近親調の環をハ長調から右向きに回るとき、始めのうちは黒鍵の数が 1 つずつ増えていき（※）、変ニ長調まで一定した後、変ニ長調を過ぎてからハ長調に戻るまでは 1 つずつ減って行く（※※）。
2. （※）の過程では黒鍵が♯ファ、♯ド、♯ソ、♯レ、♯ラの順に増え、（※※）では♭ソ、♭レ、♭ラ、♭ミ、♭シの順に減って行く。

著しいことに、項目 2 に現れる音列もまた、5 度圏の環の中に現れています。（♯ファ＝♭ソ、♯ド＝♭レなどに注意。）これらは冒頭に述べた「♯のつく順はファドソレラミシ」「♭のつく順はシミラレソ」という規則に含まれるものです。[5]

—— 後編では、これらの規則の由来を探って行きます！

[3] ハ長調の近親調にはト長調・ヘ長調のほかにイ短調もありますが、ここでは簡単のため短調は考えないことにします。

[4] mod 12 の計算については、補遺 B を参照。

[5] さらにロ長調から変ニ長調までの間で白鍵がどのように入れ替わるかを考慮すれば、冒頭に述べた規則を再現します。「♯（♭）のつく順」の意味するところは説明しませんでしたが、気になる方は各長調の**調号**を調べてみてください。

A. 振動数とは

ものが1秒間に何回震えるか（振動するか）を表す数を振動数といいます。振動数は経験的な『音の高さ』に関係するので、音の高さを表す単位と見なされることもあります。つまり、理論的には鼓膜が1秒間に770回震わせたときに経験する音の高さを770Hz（ヘルツ）と思えばよいでしょう。ドップラー効果のような特殊なことが起きないかぎり、弦などをはじいて生じる音の高さは音を出す物体の（振動の回数としての）振動数に一致すると考えられます。このことは、振動体が空気を揺らし、その波が鼓膜に届くという過程を考えれば理解できます。なお、周波数という言葉も振動数とほぼ同義です。

B. mod 12 の算術（合同式）

mod 12の算術について理解するには、時計の例で考えるのが便利です（[3], p.265)。たとえば9時の4時間後は1時、5時の10時間後は3時、これらを式で

$$9 + 4 \equiv 1 \pmod{12}$$

$$5 + 10 \equiv 3 \pmod{12}$$

と書きます。「12個あつまると消えてしまうようなもの」を考えていると思っても良いかもしれません。mod は modulo の略です。mod 12の計算のことを、日本語では『12を法とする算術』などと言います。

上ではmod 12の足し算だけを扱いましたが、もちろん引き算も定義でき、また（これは少し非自明ですが）掛け算も定義することができます。割り算は、12と互いに素であるような数で割る限りはうまく行きます。詳しくは適当な整数論の本などを参照してください。

C. 音律の歴史

この補遺では、平均律が普及する以前に用いられていた、各調律法について簡単に解説します。音律の特性はその時代の音楽の様式とも関係していますので、興味のある方は動画などを参考に比較してみるのも面白いかもしれません。

おそらく音律について最初の本格的な研究を行ったのは、古代ギリシヤのピュタゴラスだろうと言われています。彼は振動数の比が簡単な比になる場合に音が美しく協和することを発見し、とくに 1:2（オクターブ）と 2:3（純正完全 5 度）のみに基づく、ピュタゴラス音律と呼ばれる調律法を発明しました。ピュタゴラス音律は完全 5 度と完全 4 度（下図のレとソ等）が美しく響くのですが、長 3 度に濁りがあり、ドミソと重ねても美しく響きません。また 5 度環が「閉じない」（つまり、純正完全 5 度では環を一周したときに最初の音からずれてしまう）ため、どこか 1 箇所の完全五度にはずれが生じます。[6] 声部の数があまり多くなく、かつ旋律的であったとされる 15 世紀ごろまでの教会音楽（グレゴリオ聖歌など）ではこの音律が用いられていたと伝えられています。

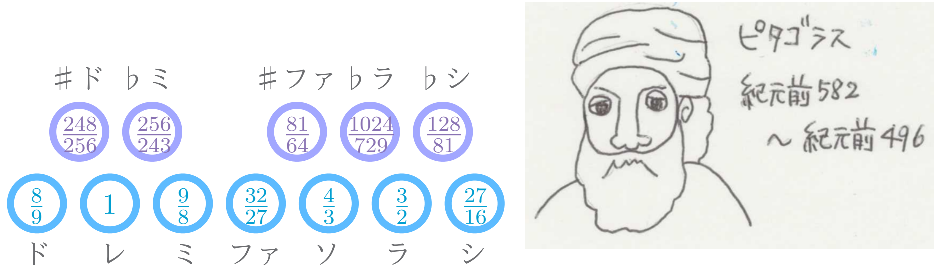


図 20: ピュタゴラス音律における各音の振動数比（構成例のひとつ）

15 世紀（ルネサンス初期）ころから音楽が複雑化し始め、オクターブ、5 度、4 度以外の音程も美しく響く音律が望まれるようになりました。そうして考案されたのが、やはり有理数比にもとづく純正律です。この音率はドミソ・ファラド・ソシレという主要 3 和音がすべて 4:5:6 という比で美しく響くので、現在でも特に声楽などでは用いられています。しかし、これを鍵盤楽器の調律に用いてしまうと、転調・移調を自由に行うことはできなくなります。また 15 世紀には、ピタゴラス音律を少し調整して長 3 度の響きを改善したミーントーンと呼ばれる音律も広く用いられてたという記録があります。

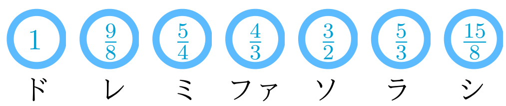


図 21: 純正音律における各音の振動数比

[6] 図 20 の例では♭ラ・♭ミ・♭シ・ファ・ド・ソ・レ・ラ・ミ・シ・♯ファ・♯ドの隣接する 2 項は美しく響きますが、♭ラと♯ドはうなりを含んでいます。

18 世紀、バッハの活躍した時代になると、全ての調が美しく演奏できるような音律が追求されるようになりました。その代表的なものが、ヴェルクマイスター音律と平均律です。これらの音律は極端に不快な響きを生まない代わりに、全ての和声が純正和声の単純な比から微妙に逸脱しています。故に、どちらの音律においても、和声は、純正律のように澄みきった響きを持ちません。それが返って深く人間的な音楽表現のいしづえになったのは面白いことだと思います。バッハがこれらの素晴らしい発明に応えて、24 の全ての調性をすべて使って『平均律クラヴィーア曲集』を書いたのは有名な話です。

図 22: バッハによる前奏曲の冒頭（平均律 I 巻第 1 番）

後世においても、バッハを深く尊敬していたショパンやショスタコーヴィチらが 24 の調性を全て用いた素晴らしい曲集を書いています。

参考文献

[1]『楽典ー理論と実習』（石桁真礼生・末吉保雄・丸田昭三・飯田隆・金光威和雄・飯沼信義，音楽之友社，1965 年）

[2]『音楽史のすすめ』（寺西春雄，音楽之友社，2002 年）

[3]『フェルマーの最終定理ーピュタゴラスに始まり、ワイルズが証明するまで』（サイモン・シン，新潮社，2000 年）

[4]『音楽の進化史』（ハワード・グッドール，河出書房新社，2015 年）