

I 出題意図: 円運動における速度や加速度, 摩擦力等, 力学の基本的な考え方を理解できているかを問うた。

問 1

- (1) 時間 Δt の間に円周上を運動する物体の移動距離は角 $\Delta\theta$ の円弧の長さ $r\Delta\theta$ である。従って速さ v は $v = \frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega$ である。
- (2) \vec{v} と \vec{v} のなす角が $\Delta\theta$ であるので, $|\Delta\vec{v}|$ は等しい二辺の長さが v である二等辺三角形の底辺の長さに対応する。従って $|\Delta\vec{v}| = 2v \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 2r\omega \sin \frac{\Delta\theta}{2}$ ($\Delta\theta < \pi$) となる。
- (3) 時間 Δt が 0 に近いとき, $\Delta\theta$ も 0 に近くなるので, 近似式 $\sin \frac{\Delta\theta}{2} \doteq \frac{\Delta\theta}{2}$ を用いて, $a = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{2r\omega \sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t} \doteq \frac{r\omega\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega^2$ となる。
- (4) 角 $\Delta\theta$ が小さくなると $\Delta\vec{v}$ は円の中心を向く。加速度 \vec{a} と $\Delta\vec{v}$ は同じ向きなので \vec{a} も円の中心を向く。従って等速円運動における物体に働く力(向心力)の大きさ F は $F = ma = mr\omega^2$ であり, これが静止摩擦力に等しい。従って物体に働く静止摩擦力の向きは円の中心向き, 大きさは $mr\omega^2$ である。

問 2

物体に働く垂直抗力の大きさ N は $N = mg$ より, 最大摩擦力の大きさは μmg である。すべりだす直前の角速度 ω_1 の向心力の大きさは $mr\omega_1^2$ であり, それが最大摩擦力の大きさに等しいため $mr\omega_1^2 = \mu mg$ が成り立つ。従って $\omega_1 = \sqrt{\frac{\mu g}{r}}$ である。

問 3

円盤面に垂直な方向に対する力のつりあいより垂直抗力の大きさ N は $N = mg \cos \phi$ である。物体に働く重力を斜面に沿う向きと垂直な向きに分解する。斜面に沿う向きの成分を H とするとその大きさは $|H| = mg \sin \phi$ である。

問 4

物体とともに回転する観測者から考えると, 物体には重力だけでなく, 向心力と同じ大きさ ($ma = mr\omega_2^2$) で逆向きの慣性力(遠心力)が働いている。この観測者からは物体は静止して見えることから, 力のつりあいより, 重力の斜面に沿う向きの成分 H と慣性力を合成した力と同じ大きさの静止摩擦力が物体に働く。静止摩擦力の大きさが最大となるのは物体が最下点の位置にあるときであり, それが最大摩擦力の大きさ $mg\mu \cos \phi$ に等しいため, $mg\mu \cos \phi = mg \sin \phi + mr\omega_2^2$ が成り立つ。従って

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g(\mu \cos \phi - \sin \phi)}{r}} \text{ である。}$$

II 出題意図：永久磁石と電流の作り出す磁場と磁場の合成について、基本的な知識を問うた。

問 1

(1) x 軸上の, $x = L$ の位置 P で磁気量 m の磁極 A が受ける力の大きさ F は, クーロンの法則の式から $F = k_m \frac{Mm}{L^2}$ である。

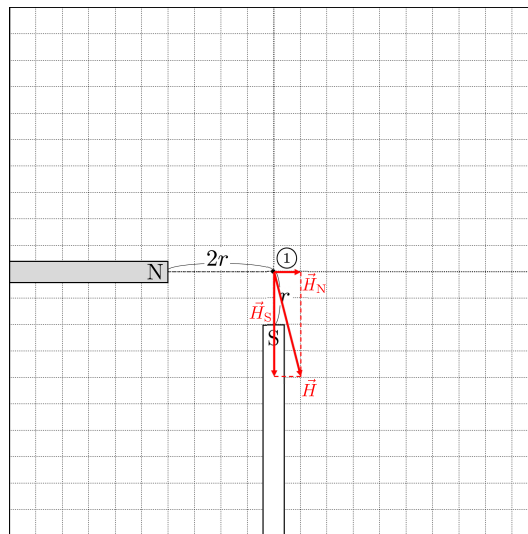
(2) $k_m \frac{Mm}{x^2} = \frac{1}{10} k_m \frac{Mm}{L^2}$

従って, 磁極 A が受ける力の大きさが F の 10 分の 1 になる, 点 R の x 座標は $\sqrt{10}L$ である。

(3) 半径 a のコイルに大きさ I の電流を流すと, コイルの中心には大きさ $H = \frac{I}{2a}$ の磁場が生じる。
 $\frac{I}{2a} = k_m \frac{M}{L^2}$, $I = k_m \frac{2aM}{L^2}$ である。円形コイルに電流を流した場合にも, 右ねじの法則が成り立つので, 電流の向きは \textcircled{a} となる。

問 2

(1) 磁場は赤の太い矢印で示す向きになる。



それぞれ磁極の磁気量が M とすると, N 極が作る磁場は N 極から離れる方向に $k_m \frac{M}{4r^2}$, S 極が作る磁場は S 極に向かう方向に $k_m \frac{M}{r^2}$ の大きさである。大きさが 1 : 4 のベクトルを合成するので, 図に示した向きになる。

(2) 磁場の向きは

② ア

③ オ

⑤ ウ

である。

点④の磁場の向きとして最も近い向き：ウ

理由：4つの磁極がそれぞれこの点に作る磁場の大きさは、点④と各磁極との距離の二乗に反比例する。図の右側の棒磁石のN極による磁場の大きさに比べて、他の磁極が作り出す磁場の大きさは十分に小さい。そのため、4つの磁極による磁場を重ね合わせると、ほぼ右側の棒磁石のN極が作り出す磁場の向きとなる。

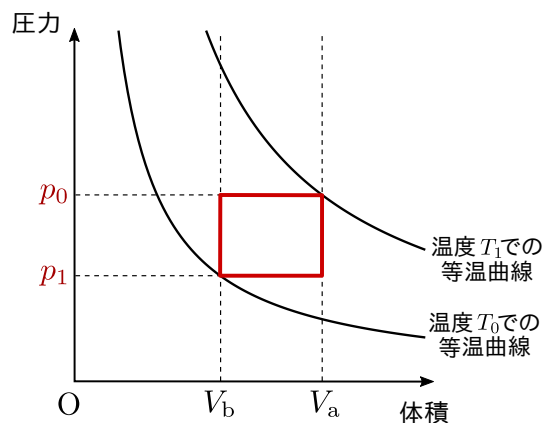
III 出題意図：熱力学の法則と理想気体の性質についての知識をもとに、加熱と冷却によって仕事をする具体的な仕組みを考察できるかを問うた。

問 1

- (1) 下側のピストンが動き出したときの力のつり合いを考えると、 $p_1 A + mg = p_0 A$ が成り立っていることから、 $\underline{p_1 = p_0 - \frac{mg}{A}}$ が成り立つ。
- (2) 理想気体の状態方程式から、 $V_a = \frac{nRT_1}{p_0}$ である。また、下側のピストンが動き始めた後、図 (b) の状態まで圧力は p_1 に保たれるから、 $V_b = \frac{nRT_0}{p_1}$ である。
- (3) $V_a > V_b$ でなければいけない。(1) の答を用いて p_1 を消去すると、 $\underline{\left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right) \frac{p_0 A}{g} > m}$ である。
- (4) 下側のピストンが動いている間は圧力は p_1 に保たれており、その間に体積が $V_b - V_a$ 減少しているから、理想気体がされた仕事は $\underline{p_1(V_a - V_b)}$ である。
- (5) 下側のピストンは高さ $\frac{V_a - V_b}{A}$ だけ動いたので、位置エネルギーの変化量は $\underline{(V_a - V_b) \frac{mg}{A}}$ である。

問 2

- (1) $\underline{\Delta U = \frac{3}{2} nR(T_1 - T_0)}$ である。
- (2) 熱力学の第一法則から、理想気体が得た熱は、内部エネルギーの変化と理想気体がした仕事の和に等しい。上側のピストンは圧力が p_0 になると動き始め、そのままの圧力で体積が $V_a - V_b$ 変化するから、理想気体がした仕事は $p_0(V_a - V_b)$ である。したがって気体が得た熱は $\underline{\Delta U + p_0(V_a - V_b)}$ である。なお、 ΔU を p_0, p_1, V_a, V_b を用いて書きかえても構わない。
- (3) 図 (a) と図 (c) で理想気体の絶対温度と圧力は等しく、途中の過程は定積変化か等圧変化だけなので、以下の図中に赤線で示した長方形に沿って状態が変化し、 p_0 および p_1 はそれぞれ上の辺と下の辺での圧力に対応する。



(4) 気体の状態は前問で描いた長方形に沿って時計回りに変化するため、理想気体がした仕事は長方形の面積に等しい。問 1 (5) で求めた位置エネルギーの変化量は、問 1 (1) の結果を用いると

$$(V_a - V_b) \frac{mg}{A} = (V_a - V_b)(p_0 - p_1) \text{ であり、長方形の面積と一致する。}$$