令和5年度4月入学者選抜試験問題

奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科(博士前期課程)

数物科学専攻

【　一　般　選　抜　】

試験科目名　:　筆記試験(物　理)

令和４年７月９日（土）

試験時間：１０：００～１２：００

注意事項

（1）問題［Ⅰ］から［Ⅳ］のうち３問題を選択して解答すること。

（2）問題ごとに別々の解答用紙を使って解答すること。
１枚の解答用紙に複数の問題の解答を書いた場合は採点の対象としない。

（3）解答用紙は必要に応じて追加できるので，手を挙げて知らせること。

問題冊子の総ページ数　－－－－－－－－－－－　９ページ

[I]

図のように，質量 m の 2 個の質点が，質量の無視できる 3 本のバネでつながれている系の一次元の振動を考える。バネ定数 k_1 のバネ A の一端は動かない壁に固定され，他端が質点 1 に接続されている。質点 1 と質点 2 は，バネ定数 k_2 のバネ B で接続され，さらに質点 2 には，バネ定数 k_1 のバネ C が接続されており，バネ C の他端は動かない壁に固定されている。全体はなめらかで水平な床におかれ，2 個の質点は同一直線上を振動する。系がつりあいの状態にあるとき，すべてのバネが自然長になるように調整されているとし，その位置からの質点のずれを，右向きを正にしてそれぞれ x_1 と x_2 で表す。以下の問いに答えよ。

問 1　以下の力をそれぞれ符号も含めて答えよ。

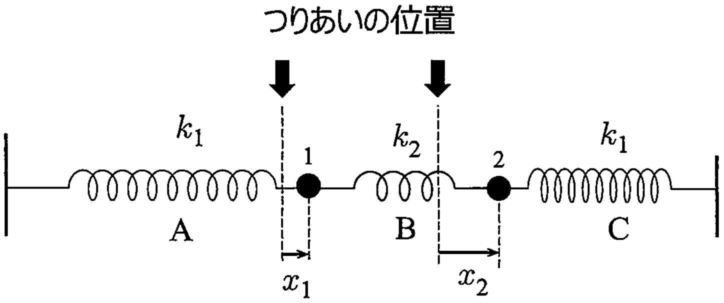
(a) 質点 1 がバネ A から受ける力。

(b) 質点 1 がバネ B から受ける力。

(c) 質点 2 がバネ B から受ける力。

(d) 質点 2 がバネ C から受ける力。

問 2　問 1 で答えた力を用いて，質点 1 および質点 2 に対するニュートンの運動方程式を記せ。



次ページに続く

[I] の続き

問 3　この系の運動を，ラグランジュの運動方程式を用いて考察する。

(a) この系の運動エネルギーを記せ。

(b) この系のポテンシャルエネルギーを記せ。

(c) この系のラグランジアン $L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ を記せ。

(d) x_1 と x_2 に対するラグランジュの運動方程式を求め，これが問 2 で求めたニュートンの運動方程式と一致することを示せ。

問 4　$t=0$ で，$x_1 = a$，$x_2 = 0$，$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ とする。以下の問いに答えよ。

(a) $X_1 = x_1 + x_2$ および $X_2 = x_1 - x_2$ として，X_1 および X_2 に対する運動方程式を記せ。

(b) 任意の時刻 t における，X_1 および X_2 を求めよ。

(c) 任意の時刻 t において，x_1 が三角関数の積の形で

$$x_1 = a\cos\left(\frac{\omega + \omega'}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega - \omega'}{2}t\right) \tag{1}$$

と書けることを示せ。ここで，$\omega = \sqrt{\dfrac{k_1}{m}}$ および $\omega' = \sqrt{\dfrac{k_1 + 2k_2}{m}}$ とする。また，x_2 も同様に三角関数の積の形で書け。

(d) $k_1 \gg k_2$ のとき，式 (1) は角振動数 $|\omega + \omega'|/2$ の速い振動の振幅が，角振動数 $|\omega - \omega'|/2$ でゆるやかに変化していると理解できる。このような現象を何というか，名称を答えよ。また，質点 1 と質点 2 の運動を比較し，その特徴を述べよ。必要であれば，グラフを用いて説明しても良い。

[II]

位置 $\vec{r}$ における静電ポテンシャル $\phi(\vec{r})$ が

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} + \dfrac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R} & (r \leq R) \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (R \leq r) \end{cases}$$

で与えられている。ここで $r = |\vec{r}|$，ε_0 は真空の誘電率，Q は電荷を表す定数，R はゼロでない定数である。以下の問いに答えよ。

問 1　電場 $\vec{E}(\vec{r})$ を求めよ。

問 2　$r \leq R$ の領域，つまり座標原点を中心とした半径 R の球の内部に一様な密度で電荷が分布していることを示せ。また，球の外側には電荷が存在していないことを示せ。

問 3　電荷が前問で示した分布であるときの静電エネルギー W を求めたい。以下の問いに答えよ。

(a) 無限遠から，微小電荷を座標原点付近に運び，一定の電荷密度 ρ で球を形成する操作を，半径が R になるまでくりかえす。球の半径が l（$l \leq R$）になったとき，静電ポテンシャルはこの球表面において

$$\frac{\rho l^2}{3\varepsilon_0}$$

であることを示せ。ただし，この静電ポテンシャルは無限遠で値がゼロとする。

(b) 半径を l から微小に増して $l + \mathrm{d}l$ にするときに必要な仕事 $\mathrm{d}W$ は，半径が l で厚さが $\mathrm{d}l$ の球殻に含まれる電荷と前小問で示した静電ポテンシャルの積になる。$\mathrm{d}W$ を求めよ。

(c) $\mathrm{d}W$ を $0 \leq l \leq R$ の範囲で積分し，W を Q，R，ε_0 を用いて表せ。

[III]

1 次元空間を運動する質量 m の粒子を量子力学で考える。はじめに粒子のハミルトニアン $\hat{H}_0$ が調和振動子型の

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$$

で与えられる場合を考える。$\hat{x}$ と $\hat{p}$ は交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たす位置と運動量の演算子であり，それらを用いて消滅演算子 $\hat{a}$ と生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を次式で定義する。

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p}, \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p}$$

また，演算子 $\hat{N}$ を $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ で定義し，$|n\rangle$ を固有方程式

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad \langle n|n\rangle = 1$$

を満たす $\hat{N}$ の固有値 n に属する規格化された固有状態とし，以下の問いに答えよ。

問 1　交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ を求めよ。

問 2　$\hat{x}$ と $\hat{p}$ を $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を用いて表せ。

問 3　$\hat{H}_0 = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$ と表せることを示せ。

問 4　$|n\rangle$ が $\hat{H}_0$ の固有状態であることを示し，そのエネルギー固有値 E_n を求めよ。

問 5　$\hat{N}$ の固有値 n は 0 以上であることを示せ。

次ページに続く

[III] の続き

次に，粒子のハミルトニアンが，時間に陽に依存しない摂動ポテンシャル $\lambda\hat{V}$ を $\hat{H}_0$ に加えた $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}$ で与えられる場合を考える。ここで，λ は十分小さい定数である。このとき，状態 $|n\rangle$ に対する $\lambda\hat{V}$ の 1 次の摂動によるエネルギーの変化 $E_n^{(1)}$ は

$$E_n^{(1)} = \lambda\langle n|\hat{V}|n\rangle$$

で与えられる。以下の問いに答えよ。

問 6　$\hat{H}_0$ の基底状態 $|0\rangle$ は $\hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす。次の (a)，(b) の場合について基底状態の 1 次の摂動によるエネルギーの変化 $E_0^{(1)}$ をそれぞれ求めよ。

$$\text{(a)} \quad \hat{V} = A\hat{x}$$

$$\text{(b)} \quad \hat{V} = \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$$

ただし，A は定数である。

問 7　問 6 (b) の場合のハミルトニアン $\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}$ の基底状態のエネルギー固有値の厳密解を求めよ。また，その厳密解と問 6 (b) の摂動論で得られた結果にどのような関係があるか示せ。

[IV]

相互作用が無視できる N 個のフェルミオン系の性質をグランドカノニカル分布を用いて取り扱う。以下の問いに答えよ。ただし，ボルツマン定数を k_{B}，絶対温度を T，化学ポテンシャルを μ とする。

問 1　この粒子の 1 粒子量子状態（スピン状態も含む）を i，その状態のエネルギーを ϵ_i とする。

(a) 大分配関数 $\Xi(T,\mu)$ は，

$$\Xi(T,\mu) = \prod_i \xi_i(T,\mu) \tag{1}$$

のように，1 粒子状態に対応する量 $\xi_i(T,\mu)$ の積の形で表される。$\xi_i(T,\mu)$ を求めよ。

(b) 式 (1) は，各々の 1 粒子状態を占める粒子についてグランドカノニカル分布が適用できることを示している。この事実を用いて，1 粒子状態 i を占める平均粒子数 $\langle n_i \rangle$ が $\langle n_i \rangle = f(\epsilon_i - \mu)$ で与えられることを示せ。ここで，$f(\epsilon - \mu)$ はフェルミ分布関数

$$f(\epsilon - \mu) = \frac{1}{\exp\{(\epsilon - \mu)/(k_{\mathrm{B}}T)\} + 1} \tag{2}$$

である。また，その分散 $\langle (n_i - \langle n_i \rangle)^2 \rangle = \langle n_i^2 \rangle - \langle n_i \rangle^2$ を，$f(\epsilon_i - \mu)$ を用いて表せ。

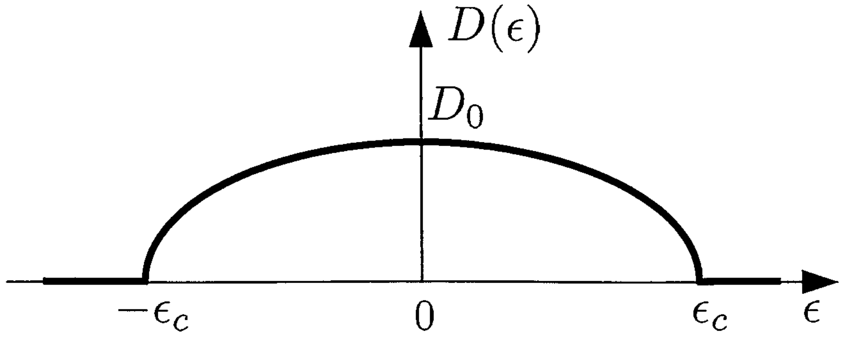
問 2　状態密度 $D(\epsilon)$ は，以下の式で定義される。

$$D(\epsilon) = \sum_i \delta(\epsilon - \epsilon_i) \tag{3}$$

ここで，i についての和は全ての 1 粒子状態にわたって行われる。1 粒子状態のエネルギーの離散性が無視できるようなマクロな大きさの系では，状態密度 $D(\epsilon)$ は連続関数とみなすことができる。今，$D(\epsilon)$ が下図のように，

$$D(\epsilon) = \begin{cases} D_0\sqrt{1-(\epsilon/\epsilon_c)^2} & \cdots |\epsilon| \le \epsilon_c \\ 0 & \cdots |\epsilon| > \epsilon_c \end{cases} \tag{4}$$

で与えられるものとする。



次ページに続く

[IV] の続き

(a) 化学ポテンシャル μ は，系の粒子数 N がグランドカノニカル分布で計算される粒子数の平均値 $\sum_i \langle n_i \rangle$ に等しくなるように与えられる。μ と N との関係は，

$$N = \int_{-\epsilon_c}^{\epsilon_c} \mathrm{d}\epsilon D(\epsilon) f(\epsilon - \mu) \tag{5}$$

で与えられることを示せ。

(b) 全系の平均エネルギー E を状態密度を用いて表せ。

問 3　問 2 で与えた系の性質を考察する。絶対零度（$T = 0$）の場合，$\epsilon < 0$ の状態が占有されており，$\epsilon > 0$ の状態は占有されていなかった。

(a) フェルミエネルギー ϵ_F はいくらか。また，粒子数 N と $T = 0$ における全系の平均エネルギー E_0 を，それぞれ D_0 と ϵ_c を用いて表せ。

(b) 系の粒子数は温度に依存しない。この事実を用いて，任意の温度で $\mu = 0$ であることを証明せよ。

(c) $T \ll \dfrac{\epsilon_c}{k_B}$ の場合の熱容量 C を $\dfrac{k_B T}{\epsilon_c}$ の最低次で求めよ。必要ならば，近似式 (6) を用いよ。

- $\mu = 0$，$T \ll \dfrac{\epsilon_c}{k_B}$ の場合に成り立つ近似式

$$\int_{-\epsilon_c}^{\epsilon_c} \mathrm{d}\epsilon G(\epsilon) \left\{ -\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right\} \simeq G(0) + \frac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 G^{(2)}(0) \tag{6}$$

ただし，$G(\epsilon)$ は $G(-\epsilon_c) = 0$ を満たし，$|\epsilon| \leq k_B T$ の範囲であまり激しく変化しない関数である。